Exercice N°1:

1) Vrai

La fonction x^2+4x-5 admet un minimum en -2.

Posons $f(x)=x^2+4x-5$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)=(x+2)^2-9$ donc $f(x)\geq -9$.

Comme $f(-2)=-9$, alors f admet un minimum en -2 sur $\mathbb{R}$.

2) Vrai

$\forall x\in\mathbb{R}$, ona $x^2+1\geq 1$ donc $0\leq \frac{1}{1+x^2}\leq 1$

Ainsi, la fonction $x\mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est minorée par 0 et majorée par 1.

3) Vrai

On pose $f(x)=\frac{1}{2-\sqrt{x-1}}$,

$D_f=\{x\in\mathbb{R}; 2-\sqrt{x-1}\neq 0 \; et \; x-1\geq 0\}$

$2-\sqrt{x-1}\neq 0$ et $x-1\geq 0 \iff \sqrt{x-1}\neq 2$ et $x\geq 1$

$|x-1|\neq 4$ et $x\geq 1 \iff x-1\neq 4$ et $x\geq 1 \iff x\neq 5$ et $x\geq 1$

$\iff x\neq 5$ et $x\in [1,+\infty[$.

3) Faux

Si ABC est un triangle isocèle en A tel que $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{7}$

alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}>0$.

ABC est un triangle isocèle en A tel que $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{7}$.

Donc $\widehat{BAC}=\pi-2\widehat{ABC}=\pi-2\times\frac{\pi}{7}=\frac{5\pi}{7}$.

Comme $\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{7}<\pi$ donc $cos(\frac{5\pi}{7})<0$.

Puisque, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.cos\widehat{BAC}=AB.AC.cos(\frac{5\pi}{7})$

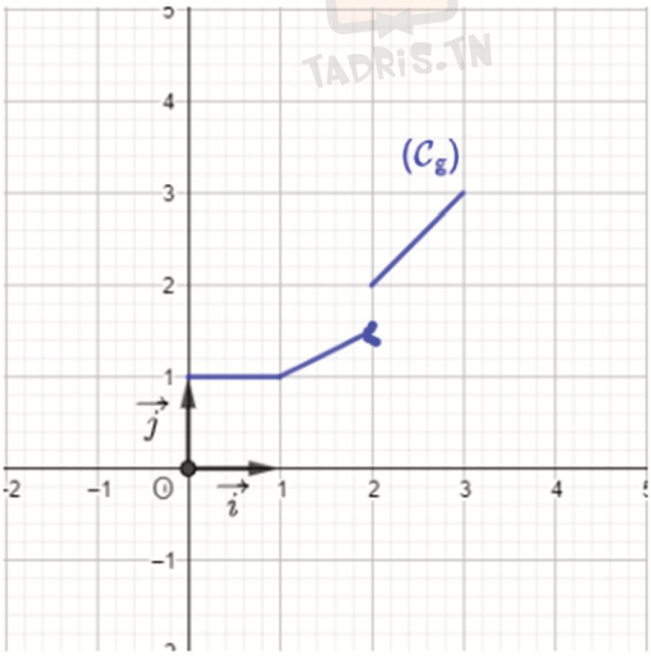
alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}<0$

Exercice N°2:

Soit g la fonction définie sur $[0,3[$ par: $g(x) = \frac{1}{2}xE(x) - \frac{1}{2}E(x) + 1$

1) $\forall x \in [0,1[$, $E(x) = 0$ donc $g(x) = 1$.
   $\forall x \in [1,2[$, $E(x) = 1$ donc $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
   $\forall x \in [2,3[$, $E(x) = 2$ donc $g(x) = x - 1 + 1$.

2) $\mathscr{C}_g$ est lareprésentation graphique de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est tracée ci-contre:



3) La représentation graphique de g ne représente aucun saut sur $]0,2[$ donc g est continue en 1.
   La représentation graphique de f sur $]1,3[$ représente un saut en 2 donc g est discontinue en 2.

Exercice N°3:

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{4x}{x^2+1} = -f(x)$ donc f est impaire.

2) a) $f(x) - 2 = \frac{4x}{x^2+1} - 2 = \frac{-2x^2+4x-2}{x^2+1} = \frac{-2(x^2-2x+1)}{x^2+1} = \frac{-2(x-1)^2}{x^2+1} \leq 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 2$.
Ainsi 2 est un majorant de f sur $\mathbb{R}$.

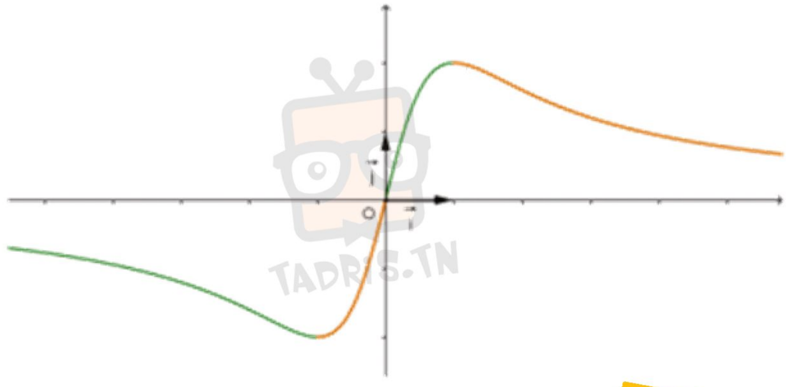
b) $f(x) = 2 \iff f(x) - 2 = 0 \iff \frac{-2(x-1)^2}{x^2+1} = 0 \iff x = 1$.
Donc 2 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f(1) \iff -f(x) \geq -f(1) \iff f(-x) \geq f(-1)$
D'où, $f(-x) \geq -2$ donc -2 est un minimum de f sur $\mathbb{R}$.
<u>ou encore:</u>
$f(x) + 2 = \frac{4x}{x^2+1} + 2 = \frac{2x^2+4x+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+2x+1)}{x^2+1} = \frac{2(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$.
Donc $f(x) \geq 2$.
Comme $f(-1) = -2$ alors -2 est un minimum de f sur $\mathbb{R}$.

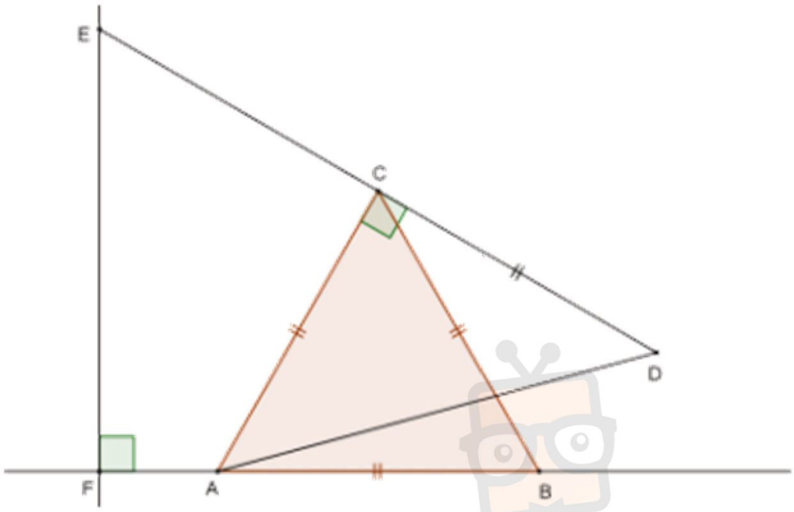
3 a) $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$,
$f(a) - f(b) = \frac{4a}{a^2+1} - \frac{4b}{b^2+1} = \frac{4a(b^2+1)-4b(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)} = \frac{4[ab^2+a-ba^2-b]}{(a^2+1)(b^2+1)}$
$f(a) - f(b) = \frac{4(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$

b) si $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$ et $a < b$ alors $b - a > 0$ et $0 \leq ab \leq 1$.
D'où $ab - 1 \leq 0$ donc $f(a) - f(b) < 0 \Longrightarrow f(a) < f(b)$.
Ainsi, f est croissante sur $[0, 1]$.

4) f est une fonction impaire donc sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Exercice N°4:



1) a) $\widehat{BCE} = \widehat{BCA} + \widehat{ACE} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

alors $cos(\widehat{BCE}) = cos(\pi 3 + \frac{\pi}{2}) = cos(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

D'où $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = CE.CB.cos(\widehat{BCE}) = 4(\frac{-\sqrt{-3}}{2}) = -2\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AB}$.

Comme ACE est un triangle rectangle en C alors $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CA} = 0$.

Par suite, $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = AE.AC.cos(\frac{\pi}{3})\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = 2 - 2\sqrt{3} = 2(1 - \sqrt{3})$.

c) F est le projethé orthogonal de E sur (AB)

donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} = -AF.AB = -2AF$.

On en déduit que, $-2AF = -2(1 - \sqrt{3})$.

Donc $AE = AC\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

AEF est un triangle rectangle en F alors $EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} =$

$\sqrt{8 - (\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$.

2) L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{AB}=0$.
C'est la droite perpendiculaire à (AB) passant par E. Donc cet ensemble est la droite (EF).

3) Soit l'ensemble (Γ) de points M du plan tels que $MD^2+ME^2=16$

a) C'est le milieu du segment $[DE]$ donc pour tout point M du plan, $MD^2+ME^2=2CM^2+\frac{DE^2}{2}=2CM^2+8$.

b) $M\in(\Gamma)\iff MD^2+ME^2=16\iff 2CM^2+8=16$
$\iff CM^2=4\iff CM=2$.
Donc (Γ) est le cercle de centre C et de rayon 2.

4) Soit O le milieu du $[AB]$ et G le point du segment $[OC]$ tel que $OG=1$.

a) $B(1,0)$, $OC=AB\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.
Donc $C(0,\sqrt{3})$, $OF=OA+AF=1+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$ alors $F(-\sqrt{3},0)$.
$(EF)\perp(AB)$ donc $x_E=x_F$ donc $x_E=-\sqrt{3}$ et $y_E=EF+1+\sqrt{3}$ donc $E(-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$.

b) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}-1\\ \sqrt{3}+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$
donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CF}=-\sqrt{3}(-\sqrt{3}-1)-\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=0$.
D'où $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{CF}$ alors les droites (BE) et (CF) sont perpendiculaires.